

El análisis estadístico de los datos de la refracción

Statistical analysis of refractive data

Dr. Waldemar Baldaquín Rodríguez,^I Dra. Suzel Lapido Polanco,^{II}

^I Comercializadora de Servicios Médicos Cubanos. La Habana, Cuba.

^{II} Instituto Cubano de Oftalmología "Ramón Pando Ferrer". La Habana, Cuba.

RESUMEN

Objetivo: describir la técnica de la descomposición en coordenadas cartesianas para el análisis estadístico de datos de la refracción. Proponer y ejemplificar una metodología.

Métodos: se realizó una revisión de la técnica de la descomposición cartesiana para el análisis estadístico de los datos de la refracción. Se emplearon datos de ejemplo para describir el algoritmo. En el análisis estadístico se realizaron pruebas de hipótesis con el uso del estadígrafo t de Student y T^2 de Hotelling, para los datos univariados y multivariados, respectivamente.

Resultados: se describe y ejemplifica un método que transformó la información de un esferocilindro a un punto en un espacio tridimensional, mediante la conversión a 3 componentes independientes, ortogonales de un sistema de coordenadas cartesianas. A diferencia de otros métodos matemáticamente equivalentes, este procedimiento produjo 3 componentes con significación óptica para describir la esfera y el cilindro: equivalente esférico y 2 cilindros cruzados. Se eliminó el carácter direccional de los datos. En este sistema de coordenadas cartesianas están definidas las operaciones propias de los números reales: adición, multiplicación por escalares, entre otros que permiten con la ayuda de matrices de 3×1 , la realización de análisis estadísticos y el cálculo de medidas de uso clínico como variación de astigmatismo, astigmatismo inducido, sorpresa refractiva o error del procedimiento refractivo, astigmatismo medio, comparaciones de medias de poblaciones, correlaciones, entre otras.

Conclusiones: la representación cartesiana de la refracción es una notación no polar que permite la representación gráfica y el análisis estadístico de los datos de individuos y de la población.

Palabras clave: astigmatismo inducido, descomposición de la refracción.

ABSTRACT

Objective: to describe the decomposition technique into Cartesian coordinates for the statistical analysis of refractive data and the proposal and exemplification of a methodology.

Method: the Cartesian decomposition technique for the statistical analysis of refractive data was reviewed. Sample data were used to exemplify the algorithm. In the statistical analysis, summary measures and hypothesis tests were applied by using Student's t statistic and Hotelling's T^2 for univariate and multivariate data, respectively.

Results: a method that allows transforming data from one spherocylinder into a point in the three-dimensional space was described and exemplified, by means of the conversion of refraction into three independent orthogonal components of a Cartesian coordinate system. Unlike other mathematically equivalent methods, this technique brought about three components with optical significance to describe the sphere and the cylinder (the spherical equivalent and two Jackson crossed cylinders), thus eliminating the directional characteristics of data. In this system of Cartesian coordinates, the operations in real numbers are defined (addition, multiplication by scalars, among others), allowing mathematical and statistical analysis based on 3×1 matrices. The most common clinical measures that can be estimated with such a method are astigmatism variation, induced astigmatism, refractive surprise or error of the refractive procedure, mean astigmatism, comparison of population means, correlations, etc.

Conclusions: the Cartesian representation of refraction is a non-polar notation that facilitates the graphical representation and statistical analysis of individual and population data.

Key words: induced astigmatism, decomposition of refractive data.

INTRODUCCIÓN

El método clínico en la práctica médica oftalmológica debe apoyarse sobre bases teóricas sólidas, para poder utilizar con racionalidad y ciencia los resultados de las diversas tecnologías empleadas en el estudio de los errores refractivos.

En ocasiones, las características oftalmológicas de interés deben ser resumidas, estimadas a nivel poblacional, comparadas y/o relacionadas con otras variables. Esta información puede provenir de ojos individuales o de grupos de ojos.

En oftalmología, los datos obtenidos de las pruebas diagnósticas pueden resultar de una naturaleza relativamente compleja, por lo que se requiere del uso de técnicas de procesamiento y análisis especiales. Muestras de esto son la agudeza visual, la refracción y la topografía, entre otros. El uso inadecuado de los métodos estadísticos convencionales puede conducir a conclusiones erróneas.¹

La naturaleza relativamente compleja de los datos de la refracción ha impulsado el desarrollo de diversos métodos para el procesamiento y análisis de los datos.² Entre estos se encuentran los descritos por *Alpins, Holladay, Long, Kaye, Naeser*, entre otros.³⁻⁸ Algunas de estas propuestas no son adecuadas para los análisis

poblacionales. Los más aceptados se basan en el análisis de componentes ortogonales, los cuales son, por lo general, matemáticamente equivalentes.⁵

La importancia clínica y la complejidad que tiene el análisis estadístico adecuado de los datos refractivos a nivel individual y poblacional, han motivado la realización de la presente revisión que tiene como objetivos describir la técnica de la descomposición en coordenadas cartesianas de la refracción, además de proponer y exemplificar la metodología para el análisis estadístico de estos datos (anexo).

MÉTODOS

Se realizó una revisión de la técnica para la descomposición cartesiana de los datos de la refracción, utilizando los términos "Refractive Change", "Surgically Induced Astigmatism" y "Cartesian decomposition" en la base de datos PubMed.

Las técnicas para la descomposición de la refracción y el procesamiento estadístico se describen utilizando los datos de ejemplo de la tabla 1, pertenecientes a un grupo de 10 pacientes que recibieron una cirugía corneoescleral (trabeculectomía). Se empleó la información de un solo ojo por paciente (ojo izquierdo).

Tabla 1. Datos refractivos pre y posoperatorios de pacientes operados con trabeculectomía

-	Demográficos		Preoperatorio			Posoperatorio			
	Paciente	Sexo	Edad	esfera	cilindro	eje	esfera	cilindro	eje
1		F	42	-2,42	0,65	108	-2,34	1,63	165
2		M	37	-0,04	0,34	177	0,09	0,78	177
3		F	69	-1,28	1,64	162	0,21	1,19	6
4		M	57	-2,84	1,49	125	-2,57	1,44	129
5		F	61	0,61	0,5	120	0,84	0,64	81
6		M	42	-3,33	2,63	104	-3,11	2,66	105
7		F	38	-11,16	3,04	101	-11,27	3,4	90
8		M	16	-2,13	1,46	76	-2,72	1,76	95
9		M	47	-4,19	0,84	157	-2,99	0,72	48
10		M	66	-3,24	3	3	-1,33	0,16	136

La conversión de las refracciones en notación polar a componentes cartesianos, se realizó con un complemento para Microsoft Excel 2007 desarrollado por los autores en VB.NET. Con SPSS versión 19 se estimaron los intervalos y regiones de confianza para la media de los componentes. Se realizaron, además, las pruebas de hipótesis univariadas y multivariadas, con los estadígrafos t de Student y T² de Hotelling, respectivamente.

RESULTADOS

LAS EXPRESIONES DE LA REFRACCIÓN

Las notaciones polares de la refracción son adecuadas para el uso clínico porque describen el estado refractivo del sistema óptico-ocular y permiten la prescripción de los cristales correctores, entre otros usos. Sin embargo, se han descrito un número de elementos que dificultan el análisis matemático y estadístico de los datos, entre las que se encuentran:^{5,9-10}

1. La existencia de notaciones múltiples (en cilindro positivo, cilindro negativo y doble cilindro) que están generalmente asociadas a esferas y ejes diferentes.
2. El carácter direccional de los datos (eje de la refracción) que impide el uso de las herramientas estadísticas convencionales para las variables cuantitativas. Por ejemplo, el ángulo medio de dos refracciones con $1,00@10^\circ$ y $1,00@170^\circ$ no es $1,00@90^\circ$.
3. La ausencia de independencia entre los componentes esfera, cilindro y eje de la refracción (en lenguaje matemático no son "linealmente independientes"). Ejemplo de esto es el caso de dos cilindros ortogonales de igual magnitud que dan como resultado una esfera.
4. El ciclo de la refracción es de 180° , mientras que el ciclo trigonométrico es de 360° . Esto impide el uso de las funciones trigonométricas estándares.

La creación de vectores a partir de los datos de la refracción en notación polar y la representación en gráficos como el de Holladay, han facilitado la estimación de indicadores como el astigmatismo inducido por cirugía (AIC).¹¹ Sin embargo, desde el punto de vista estadístico, los métodos vectoriales no resultan suficientes porque no es posible determinar con exactitud el error de las estimaciones, lo que impide la creación de los intervalos de confianza y las pruebas de hipótesis. Por eso, se ha concluido que las expresiones polares no son apropiadas para resumir y comparar la información de varios pacientes o las múltiples observaciones de un mismo paciente. Estos problemas pueden ser superados con el uso de las expresiones no polares de la refracción.⁵

Aunque se han descrito varias expresiones no polares, la mayor parte de ellas tienen orígenes similares, son generalmente equivalentes y resuelven los problemas enumerados anteriormente, lo que permite el análisis estadístico de los datos refractivos.⁵

TRATAMIENTO DE LOS DATOS MEDIANTE LA DESCOMPOSICIÓN CARTESIANA

Componente esférico de la refracción

En diversos estudios se ha propuesto el equivalente esférico para el análisis estadístico del componente esférico de la refracción. Esta medida es independiente del componente astigmático, por lo que se puede analizar matemática y estadísticamente

con las técnicas tradicionales. Se puede obtener a partir de las notaciones polares utilizando la fórmula siguiente:^{1,5,9-11}

$$EqEsf = z = Esf + \frac{Cil}{2} \quad (1)$$

Donde:

EqEsf= equivalente esférico.

Esf= esfera.

Cil= cilindro.

En las representaciones de los esferocilindros en el espacio dióptrico tridimensional, el equivalente esférico constituye la dimensión *z* ortogonal al plano del astigmatismo.

Ejemplo:

Utilizando los datos del paciente 1, tenemos:

$$Z = EqEsf = -2,42 + \frac{0,65}{2} = -2,42 + 0,325 = -2,10$$

De igual manera se calculan los equivalentes esféricos pre y posquirúrgicos, como se muestra en la tabla 2 del preoperatorio y en la tabla 3 del posoperatorio.

Tabla 2. Conversión de los datos refractivos preoperatorios a componentes del espacio dióptrico y estimación de la refracción media

Paciente	Esfera	Cilindro	Eje	Z (Eq,Esf,)	X (CC10)	Y (CC45)
1	-2,42	0,65	108	-2,10	0,26	0,19
2	-0,04	0,34	177	0,13	-0,17	0,02
3	-1,28	1,64	162	-0,46	-0,66	0,48
4	-2,84	1,49	125	-2,10	0,25	0,70
5	0,61	0,5	120	0,86	0,13	0,22
6	-3,33	2,63	104	-2,02	1,16	0,62
7	-11,16	3,04	101	-9,64	1,41	0,57
8	-2,13	1,46	76	-1,40	0,64	-0,34
9	-4,19	0,84	157	-3,77	-0,29	0,30
10	-3,24	3	3	-1,74	-1,49	-0,16
Media	-2,51	0,58	122,22	-2,22	0,12	0,26

Tabla 3. Conversión de los datos refractivos posoperatorio a componentes del espacio dióptrico y estimación de la refracción media

Paciente	Esfera	Cilindro	Eje	Z (Eq,Esf.)	X (CCJ0)	Y (CCJ45)
1	-2,34	1,63	165	-1,53	-0,71	0,41
2	0,09	0,78	177	0,48	-0,39	0,04
3	0,21	1,19	6	0,81	-0,58	-0,12
4	-2,57	1,44	129	-1,85	0,15	0,70
5	0,84	0,64	81	1,16	0,30	-0,10
6	-3,11	2,66	105	-1,78	1,15	0,67
7	-11,27	3,4	90	-9,57	1,70	-0,00
8	-2,72	1,76	95	-1,84	0,87	0,15
9	-2,99	0,72	48	-2,63	0,04	-0,36
10	-1,33	0,16	136	-1,25	-0,00	0,08
Media	-2,09	0,59	105,07	-1,80	0,25	0,15

Componente astigmático de la refracción

El análisis del componente astigmático de la refracción se dificulta porque se describe utilizando dos elementos (cilindro y eje) uno de los cuales tiene un carácter direccional.

A partir de la propuesta de *Stokes* de duplicar el eje, se ha derivado el concepto de vector de astigmatismo, que permite la representación gráfica en un plano. Al ubicarlo en un gráfico de ángulo doble, el vector del astigmatismo asume longitud igual a la magnitud del cilindro y el ángulo corresponde al eje de la refracción multiplicado por 2.^{5,10}

Para la eliminación del componente direccional se han empleado métodos que convierten el vector en componentes independientes (ortogonales). La descomposición cartesiana es uno de los métodos más utilizados y constituye, por su facilidad de cálculo, la base de varias notaciones no polares de la refracción (Fig. 1).¹⁰

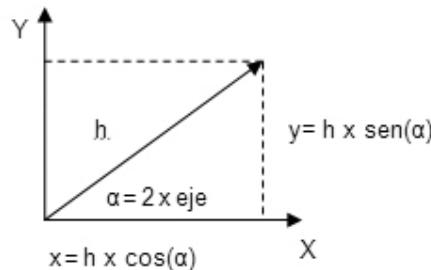


Fig. 1. Funciones trigonométricas en el análisis del vector del astigmatismo.

Las funciones trigonométricas (función seno y coseno) y la duplicación del ángulo (como propone Stokes) son el fundamento de las propuestas para convertir un par cilindro y eje en coordenadas polares a componentes en coordenadas cartesianas. Para esto, se utilizan las fórmulas Holladay y Bennet:^{5,11}

$$C_0 = x' = \text{cilindro} \times \cos(2 \times \text{eje}) \quad (2)$$

$$C_{45} = y' = \text{cilindro} \times \sin(2 \times \text{eje}) \quad (3)$$

Los componentes C_0 y C_{45} son matemáticamente (linealmente) independientes y forman un plano (llamado plano del astigmatismo o plano dióptrico bidimensional) en el que cada vector (o punto) se corresponde con un astigmatismo y viceversa. En este plano están definidas las operaciones matemáticas de suma y multiplicación que permiten determinar medidas útiles como el astigmatismo medio y el astigmatismo inducido por cirugía, entre otras.

El equivalente esférico (z) es independiente de los componentes x' e y' , pero no se pueden utilizar para la creación de un espacio dióptrico tridimensional porque las distancias en dioptrías no son homogéneas. Para solucionar esta dificultad se emplean los cilindros cruzados de Jackson (CCJ) de ejes $0^\circ/90^\circ$ (J_0) y $45^\circ/135^\circ$ (J_{45}):^{1,9}

$$X = J_0 = (-\text{Cilindro}/2) \cos(2 \times \text{eje}) \quad (4)$$

$$Y = J_{45} = (-\text{Cilindro}/2) \sin(2 \times \text{eje}) \quad (5)$$

Donde:

El *Cilindro* y el *eje* son los de la notación en cilindro positivo del astigmatismo.

Los 2 CCJ tienen ejes ortogonales y constituyen cada caso un subespacio vectorial: la adición de 2 CCJ resulta un tercer CCJ con poder igual a la suma de los 2 CCJ.¹⁰ Con estos dos cilindros cruzados de Jackson, de ejes $0^\circ/90^\circ$ y $45^\circ/135^\circ$ (que forman las coordenadas **x** e **y** respectivamente) y un lente esférico con poder igual al equivalente esférico **z**, se puede representar geométricamente el esfero-cilindro de la refracción mediante un vector o punto en el espacio tridimensional^{1,10} (Fig. 2).

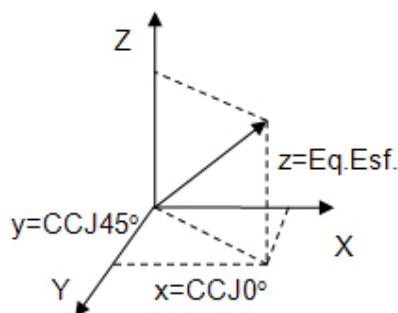


Fig. 2. Representación del esferocilindro en el espacio.

La independencia matemática de los tres componentes del vector de poder que se extiende desde el origen de coordenadas del espacio dióptrico tridimensional hasta el punto $[x,y,z] = (J_0, J_{45}, EqEsf.)$, se traduce en las propiedades siguientes:¹

- Un lente esférico no puede ser producido por ninguna combinación de lentes CCJ.
- Un lente CCJ con eje $0^\circ/90^\circ$ no puede ser producido por ninguna combinación de lentes esféricos con CCJ con eje $45^\circ/135^\circ$.
- Un lente CCJ con eje 45° no puede ser producido por ninguna combinación de lentes esféricos con CCJ con eje 0° .

Para considerar el comportamiento del componente esférico junto con el astigmático, se deben homogeneizar las distancias en el espacio dióptrico, empleando las fórmulas (4) y (5), además de la (1), en lugar de las fórmulas (2) y (3). En aras de simplificar el número de ecuaciones, se propone emplear las fórmulas (1), (4) y (5) en el análisis estadístico de los datos refractivos.

La importancia matemática y estadística de esta descomposición radica en que permite realizar las operaciones propias de los números reales como la adición y la multiplicación por escalares de forma independiente en las tres coordenadas rectangulares de la refracción $(X, Y, Z) = (J_0, J_{45}, EqEsf.)$. La matriz $3 \times 1 [J_0, J_{45}, EqEsf.]$, creada a partir de los componentes facilita la estimación de las medidas de uso clínico como la variación de la refracción (incluido el caso particular de variación del astigmatismo denominado astigmatismo inducido por la cirugía, la sorpresa refractiva o error del procedimiento refractivo) y medidas de tendencia central como la refracción media (incluyendo el astigmatismo medio), las comparaciones de medias de poblaciones, correlaciones, entre otras.⁹

A diferencia de otros métodos matemáticamente equivalentes, este procedimiento produce tres componentes con significación óptica para describir la esfera y el cilindro (equivalente esférico y los dos cilindros cruzados de *Jackson*) y elimina el carácter direccional de los datos.

Ejemplo:

Utilizando los datos del paciente 1, mediante las fórmulas y se calculan los componentes X e Y:

$$\begin{aligned}
 X = J_0 &= \left(\frac{-0,65}{2}\right) \cos(2x108^\circ) & Y = J_{45} &= \left(\frac{-0,65}{2}\right) \sin(2x108^\circ) \\
 &= -0,325x\cos(216^\circ) & &= -0,325x\sin(216^\circ) \\
 &= -0,325x - 0,81 & &= -0,325x - 0,59 \\
 &= 0,26 & &= 0,19
 \end{aligned}$$

Los componentes X e Y pre y posquirúrgicos de los demás ojos se calculan de igual manera.

VARIACIÓN DE LA REFRACCIÓN

Para calcular la variación de la refracción se realizan operaciones de suma (y diferencia) con matrices de 3×1 . Así, la matriz que representa la variación de la refracción (matriz diferencia) se obtiene al restar la refracción inicial de la matriz de la refracción final, lo cual equivale a restar de cada componente de la matriz final los componentes de la matriz inicial:⁹

$$\Delta Refrac = Refrac_{final} - Refrac_{inicial} \quad (6)$$

$$[\Delta J_0, \Delta J_{45}, \Delta EqEsf] = [J_0, J_{45}, EqEsf]_{final} - [J_0, J_{45}, EqEsf]_{inicial} \quad (7)$$

Lo anterior deriva en la creación de una sola matriz con la diferencia de los componentes de las matrices final e inicial:

$$[\Delta J_0, \Delta J_{45}, \Delta EqEsf] = [J_0_{final} - J_0_{inicial}, J_{45}_{final} - J_{45}_{inicial}, EqEsf_{final} - EqEsf_{inicial}] \quad (8)$$

Donde:

$$[J_0, J_{45}, EqEsf]_{inicial} = \left[\frac{cil_{inicial} \times \cos(eje_{inicial} \times 2)}{2}, \frac{cil_{inicial} \times \sin(eje_{inicial} \times 2)}{2}, EqEsf_{inicial} \right] \quad (9)$$

$$[J_0, J_{45}, EqEsf]_{final} = \left[\frac{cil_{final} \times \cos(eje_{final} \times 2)}{2}, \frac{cil_{final} \times \sin(eje_{final} \times 2)}{2}, EqEsf_{final} \right] \quad (10)$$

Entre las aplicaciones de este método está el cálculo de la refracción (y el astigmatismo) inducida por la cirugía y la estimación de la anisometropía, entre otros.

Ejemplo:

Para el cálculo del efecto refractivo inducido por la cirugía en el paciente 1, se parte de componentes X, Y, Z del espacio dióptrico tridimensional, calculados anteriormente y mediante la suma algebraica (diferencia) entre los componentes posquirúrgicos y prequirúrgicos; se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} [\Delta J_0, \Delta J_{45}, \Delta EqEsf] &= [-0,71 - 0,26, 0,41 - 0,19, -1,53 - (-2,10)] \\ &= [-0,97; 0,22; 0,57] \end{aligned}$$

Los componentes X, Y y Z del efecto refractivo inducido por la cirugía de los demás ojos se calculan de igual manera, como se muestra en la tabla 4.

Tabla 4. Efecto refractivo inducido por la cirugía en cada ojo y efecto medio

Paciente	ERIC Z (Eq.Esf.)	ERIC X (CCJ0)	ERIC Y (CCJ45)	ERIC esfera	ERIC cilindro	ERIC eje
1	0,57	-0,97	0,22	-0,42	1,99	83,70
2	0,35	-0,22	0,02	0,13	0,44	87,00
3	1,27	0,08	-0,61	0,65	1,22	138,83
4	0,25	-0,11	0,00	0,14	0,21	88,86
5	0,30	0,18	-0,32	-0,06	0,73	149,81
6	0,24	-0,01	0,05	0,19	0,10	50,50
7	0,07	0,29	-0,57	-0,57	1,28	148,52
8	-0,44	0,22	0,50	-0,98	1,09	32,93
9	1,14	0,33	-0,66	0,40	1,48	148,26
10	0,49	1,49	0,24	-1,02	3,02	4,52
Media	0,42	0,13	-0,11	0,25	0,34	159,43

ERIC: efecto refractivo inducido por la cirugía.

La conversión de la variación de la refracción de coordenadas rectangulares a polares se realiza con las siguientes ecuaciones:⁹

Donde:

$$\Delta Refrac = [\Delta J_0, \Delta J_{45}, \Delta EqEsf] \leftrightarrow Esf_{\Delta} (cil_{\Delta}) \times eje_{\Delta} \quad (11)$$

$$|Cil_{\Delta}| = 2 \times \sqrt{\Delta J_0^2 + \Delta J_{45}^2} \quad (12)$$

$$Esf_{\Delta} = EqEsf_{\Delta} - \frac{Cil_{\Delta}}{2} \quad (13)$$

$$eje_{\Delta} = \frac{1}{2} \times ArcTg \left(\frac{J_{45\Delta}}{J_{0\Delta}} \right) + C \quad (14)$$

Ajustando las propuestas de Holladay al factor negativo (-0,5) utilizado en las fórmulas 4 y 5 para encontrar J_0 y J_{45} , la constante C debe asumir los siguientes valores:¹¹ C = 0° si J_0 y $J_{45} < 0$; C = 90° si J_0 es positivo y C = 180° si $J_0 < 0$ y $J_{45} > 0$.

Ejemplo:

Los componentes X, Y, Z del efecto refractivo inducido por la cirugía del primer caso se pueden convertir nuevamente a componentes polares,

cilindro, esfera y eje, mediante las ecuaciones anteriores, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 |Cil_i| &= 2 \times \sqrt{-0,97^2 + 0,22^2} = 2 \times \sqrt{0,9409 + 0,0484} \\
 &= 2 \times \sqrt{0,9893} = 2 \times 0,9946 = 1,9892 \\
 Esf_i &= 0,57 - \frac{1,99}{2} = 0,57 - 0,995 = -0,42 \\
 eje_i &= \frac{1}{2} \times \text{ArcTg} \left(\frac{0,22}{-0,97} \right) + 90^\circ \\
 &= 0,5 \times \text{ArcTg}(-0,223) + 90^\circ \\
 &= 0,5 \times (-12,596) + 90^\circ \\
 &= -6,298 + 90^\circ \\
 &= 83,70^\circ
 \end{aligned}$$

Refracción media

Otro indicador muy utilizado es la refracción media (\bar{M}), que incluye el astigmatismo medio y el componente esférico medio. Se calcula mediante la ecuación:⁹

$$\bar{M} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n M_i = [\bar{J}_0, \bar{J}_{45}, \bar{EqEsf}] = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n ([J_0, J_{45}, EqEsf])_i \quad (15)$$

$$\bar{M} = \left[\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n J_{0i}, \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n J_{45i}, \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n EqEsf_i \right] \quad (16)$$

Donde M_i es la matriz 3×1 de la refracción de cada unidad de análisis (cada ojo); i y n es el tamaño muestral:

$$M_i = [J_0, J_{45}, EqEsf]_i = \left[\frac{cil_i \times \cos(eje_i \times 2)}{2}, \frac{cil_i \times \sin(eje_i \times 2)}{2}, Esf_i + \frac{Cil_i}{2} \right] \quad (17)$$

En la ecuación (16) puede comprobarse que resumir el estado refractivo de la población estudiada, mediante el cálculo de la media (\bar{M}), equivale al cálculo de la media de cada componente del espacio dióptrico tridimensional.

Ejemplo:

La refracción media (incluyendo el astigmatismo medio) prequirúrgico puede describirse con la ayuda de los componentes X, Y, Z de la siguiente forma: el

equivalente esférico medio prequirúrgico se obtiene fácilmente mediante la suma de los valores del componente en cada ojo y dividiendo por n, así:

$$\overline{Eq. Esf} = (0,57+0,35+1,27+0,25+0,30+0,24+0,07+(-0,44)+1,14+0,49) / 10 \\ = -2,22$$

De igual manera se calculan la media de los componentes X e Y (J_0 y J_{45}). La media de las refracciones en notación polar se obtiene a partir de los valores de las medias en notación cartesiana, las cuales deben ser transformadas utilizando las fórmulas que aparecen a continuación.

En la reconversión de la refracción media de coordenadas cartesianas a polares se utilizan las siguientes expresiones idénticas a las ecuaciones (12), (14) y (13):

$$\overline{M} = \left[\overline{J_0}, \overline{J_{45}}, \overline{Eq. Esf} \right] \Leftrightarrow Esf_{\text{media}} (cil_{\text{media}}) \times eje_{\text{media}} \quad (18)$$

$$|cil_{\text{media}}| = 2 \times \sqrt{\overline{J_0}^2 + \overline{J_{45}}^2} \quad (19)$$

$$Esf_{\text{media}} = \overline{Eq. Esf} - \frac{Cil}{2} \quad (20)$$

$$eje_{\text{media}} = \frac{1}{2} \times \text{ArcTg} \left(\frac{\overline{J_{45}}}{\overline{J_0}} \right) + C \quad (21)$$

Donde:

Con $C = 0^\circ$ si J_0 y $J_{45} > 0$; $C = 90^\circ$ si J_0 es positivo y $C = 180^\circ$ si $J_0 < 0^\circ$ y $J_{45} > 0^\circ$.

Los procedimientos para el cálculo de la variación de la refracción y la refracción media pueden combinarse para la determinación de la variación media (como se muestra en el algoritmo). Ejemplo de esto son la determinación de astigmatismo inducido medio y el efecto refractivo medio de la cirugía.

INDICADORES DERIVABLES DE LOS COMPONENTES CARTESIANOS

Con los componentes cartesianos Eq. Esférico, J_0 y J_{45} se pueden construir los siguientes indicadores: astigmatismo total J , distorsión global n y el RMS (*root mean square* o raíz cuadrada del error refractivo). El astigmatismo total J se obtiene mediante la ecuación:

$$J = \sqrt{(J_0^2 + J_{45}^2)} \quad (22)$$

En el espacio dióptrico tridimensional la longitud pitagórica del vector $|n|$ está dada por:

$$|n| = B = \sqrt{Eq.Esf^2 + J_0^2 + J_{45}^2} \quad (23)$$

Este indicador mide el poder de distorsión global ("overallblurringstrength B") de un lente esferocilíndrico o error refractivo.^{1,5} Algunos autores reportan que, en algunos casos, esta medida predice mejor la pérdida de la agudeza visual que el RMS (*root mean square*) o el equivalente esférico solo.^{5,12}

$$RMS = \sqrt{\left(\frac{J_{45}^2}{2} + Eq.Esf^2 + \frac{J_0^2}{2}\right)} \quad (24)$$

Donde los componentes $[J_{45}, Eq.Esf, J_0]$ representan el Cilindro Cruzado de Jackson con ejes 45/135°, el Equivalente Esférico y Cilindro Cruzado de Jackson con ejes 90/180°.

Análisis de frente de onda

El frente de onda puede ser descompuesto en elementos ópticos por varias series de polinomios, entre los cuales se encuentran los de Zernike. El astigmatismo regular se representa como un polinomio de segundo orden combinado con componente sinusoidal armónico de segundo orden. Los siguientes polinomios representan el astigmatismo regular con direcciones fijas (cartesianas):

Polinomio con ejes 0/90°:

$$Z_2^2 = c_2^2 \sqrt{6} \rho^2 \cos(2\omega) \quad (25)$$

Polinomio con ejes 45/135°:

$$Z_2^{-2} = c_2^{-2} \sqrt{6} \rho^2 \sin(2\omega) \quad (26)$$

Desenfoque:

$$Z_2^0 = c_2^0 \sqrt{3} (2\rho^2 - 1) \quad (27)$$

Donde:

ρ indica la distancia radial normalizada (asume valores de 0 a 1) y ω es el componente angular (con valores de 0 a 2π).

Para la conversión de los componentes de Zernike a vectores de poder del espacio dióptrico cartesiano en dioptrías se utilizan las siguientes ecuaciones:¹³⁻¹⁴

Cilindro cruzado de Jackson con ejes 0/90°:

$$J_0 = \frac{-2\sqrt{6}c_2^2}{r^2} \quad (28)$$

Cilindro cruzado de Jackson con ejes 45°/135°:

$$J_{45} = \frac{-2\sqrt{6}c_2^2}{r^2} \quad (29)$$

Equivalente esférico:

$$Eq.Esf = \frac{-4\sqrt{3}c_2^0}{r^2} \quad (30)$$

Donde:

El diámetro de la pupila, r y los coeficientes de Zernike están expresados en metros (micras).

ANÁLISIS ESTADÍSTICO

Pruebas de hipótesis

Por lo general, las cirugías oftalmológicas (como las de catarata) producen cambios en la refracción, pero para estimar si estos cambios son sistemáticos y estadísticamente significativos se deben realizar pruebas de hipótesis sobre la media, es decir, sobre la refracción inducida media o astigmatismo inducido medio.

Las pruebas de hipótesis sobre la media estimada permiten probar si el efecto es significativo; en otras palabras, probar si como efecto de la cirugía se ha producido un cambio significativo.

Pruebas de hipótesis e inferencia univariada

Si lo que interesa es probar la significación estadística del efecto en uno de los componentes de la refracción (por ejemplo, el equivalente esférico), se puede realizar una prueba de hipótesis univariada.

Por ejemplo, si se desea probar si la cirugía realizó un cambio de una dioptría en el componente equivalente esférico, se plantea la hipótesis nula:

$$H_0: \mu_{EqEsf} = 1 D$$

Donde:

"La media del equivalente esférico es igual a 1 dioptría".
 μ es la media poblacional.

Se plantea, además, la correspondiente hipótesis alternativa:

$$H_1: \mu_{EqEsf} \neq 1D$$

Donde:

"La media del equivalente esférico no es igual a 1 dioptría".

Para evaluar la hipótesis nula se sigue el procedimiento siguiente: 1) se crea una estadística de prueba, 2) se establece un nivel de confianza y 3) se compara el valor observado con una distribución bajo la hipótesis nula.

Supongamos que X_1, X_2, \dots, X_n son los equivalentes esféricos (provenientes de una población con distribución normal), entonces la estadística de prueba apropiada es:¹⁵

$$t = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{s_Z} \quad (31)$$

Donde:

La estadística t tiene distribución t de Student con $n - 1$ grado de libertad.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \quad (32)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 \quad (33)$$

Donde:

\bar{X} y s^2 son la media y la varianza muestrales.

Se rechaza la hipótesis nula si $|t|$ es mayor que $t_{n-1}(\alpha/2)$, donde α es el error tipo I fijado (probabilidad de rechazar la hipótesis nula siendo cierta).

Lo anterior equivale a rechazar la hipótesis nula cuando t^2 es mayor que: $t_{n-1}^2(\alpha/2)$:

$$t^2 = \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2}{\frac{s^2}{n}} = n(\bar{X} - \mu_0)(s^2)^{-1}(\bar{X} - \mu_0) \quad (34)$$

Donde:

t^2 representa el cuadrado de la distancia entre la media de la muestra \bar{X} y la media poblacional hipotética μ_0 , expresada en términos de desviaciones estándar de la media \bar{X} , que es:

$$S_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Intervalo de confianza para la media de un componente

Con los valores de la media se puede determinar un conjunto de valores posibles de la media poblacional para un determinado nivel de confianza $100(1 - \alpha)\%$. El intervalo de confianza representa un rango alrededor de la media de la muestra \bar{X} donde la media poblacional (μ) yace con una probabilidad $1 - \alpha$. Se dice que con una confianza del $100(1 - \alpha)\%$, μ yace en el intervalo:

$$\bar{X} \pm t_{n-1}^2(\alpha/2) \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (35)$$

Prueba de hipótesis e inferencia multivariada

Con cada uno de los componentes del espacio dióptrico tridimensional se puede realizar una serie de tres pruebas t univariadas con el objetivo de probar la hipótesis nula de que el componente del vector de poder medio en cada una de las tres dimensiones es cero.¹

Cuando se desea realizar estimaciones sobre la media de más de un componente (por ejemplo, los dos componentes de astigmatismo regular o los tres componentes de la refracción), se prefieren las pruebas multivariadas a las univariadas porque las primeras ejercen mejor control sobre el error tipo I, tienen mayor potencia estadística y tienen en cuenta las correlaciones entre las variables.^{1,5,15-16}

La prueba de hipótesis multivariada consiste en determinar si un vector de dos o tres componentes es un valor plausible para la verdadera media de una población.

Por ejemplo, para probar si el efecto de la cirugía sobre la refracción fue significativo. Bajo la hipótesis nula no debe haber diferencias entre las refracciones antes de la cirugía y después de la cirugía. Esto equivale a comparar la variación de la refracción media con un vector plano en el que los tres componentes son 0 D:

$$\mu_0 = [0 \ 0 \ 0]'$$

Para probar que el efecto refractivo medio inducido por la cirugía μ es igual a cero (un vector plano $\mu_0 = [0 \ 0 \ 0]'$), se pueden plantear las siguientes hipótesis nulas:

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad o \quad H_0: \mu = 0$$

Con las correspondientes hipótesis alternativas:

$$H_1: \mu \neq \mu_0 \text{ o } H_1: \mu \neq 0.$$

Las hipótesis multivariadas se evalúan utilizando la estadística de prueba T^2 de *Hotelling* para determinar si el vector de poder medio es significativamente diferente de un vector de longitud cero:¹

$$T^2 = (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \left(\frac{1}{n} \mathbf{S} \right)^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0) = n(\bar{\mathbf{X}} - \mu_0)' \mathbf{S}^{-1} (\bar{\mathbf{X}} - \mu_0) \quad (36)$$

Donde:

$$\bar{\mathbf{X}}_{p \times 1} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j = \frac{1}{n} \mathbf{X}' \mathbf{1} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_p \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{S}_{p \times p} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}})' (\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}) = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{12} & s_{22} & \vdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{1p} & s_{2p} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Aquí el número de variables p es igual a 2 cuando se analiza el componente astigmático solamente y $p= 3$ en el análisis de datos refractivos utilizando los 3 componentes.

La estadística resultante se compara con la distribución F de Fisher porque la prueba T^2 tiene distribución aproximadamente igual a F:

$$T^2 \sim \frac{(n-1)p}{n-p} F_{p, n-p} \quad (39)$$

Se rechaza la hipótesis nula si T^2 es mayor que el punto porcentual seleccionado de F a partir del nivel de significación $1 - \alpha$.

Este método multivariante es preferido porque los componentes de la refracción están correlacionados.^{1,5} En este caso las matrices de medias y la varianzas y covarianzas describen completamente la distribución trivariada de la refracción en el espacio. El área o región de confianza (equivalente al intervalo de confianza en el análisis univariado) a un nivel $100(1 - \alpha)\%$ para el valor combinado de la media tiene forma de elipsoide en el espacio tridimensional.^{1,5}

Región de confianza multivariada

Se utiliza el término **región de confianza** para describir los IC multivariados. En general, una **región de confianza** al 100 $(1 - \alpha)$ % para el vector de media poblacional de p dimensiones es el elipsoide determinado por las μ_0 , tales que:

$$n(\bar{X} - \mu_0)' S^{-1}(\bar{X} - \mu_0) \leq \frac{(n-1)p}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha) \quad (40)$$

Este elipsoide está centrado en el punto \bar{X} (denominado centroide) y tiene ejes determinados λ_i, e_i que son los eigenvalores y eigenvectores de la matriz de covarianza muestral S .

$$\pm \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\frac{(n-1)p}{n(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha)} e_i \quad (41)$$

Intervalos de confianza simultáneos

La proyección de la **región de confianza multivariada** en los componentes univariados, conservando el error global tipo I, se realiza con la ayuda de la combinación lineal z :

$$z_j = a_1 x_{j1} + a_2 x_{j2} + \dots + a_p x_{jp} \quad (42)$$

Se conoce que Z tiene distribución normal con media $\bar{z} = a' \bar{x}$ y varianza $s_z^2 = a' S_x a$. El intervalo de confianza al nivel 100 $(1 - \alpha)$ % para $\mu_z = a' \mu_x$ está dado por:¹⁷⁻¹⁸

$$a' \bar{x} \pm \sqrt{\frac{p(n-1)}{(n-p)} F_{p, n-p}(\alpha)} a' S_x a \quad (43)$$

$a_1 = (1, 0, \dots, 0)', a_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)' \text{ y } a_p = (0, \dots, 1)'$ se obtiene
 $\bar{x} \pm c \sqrt{s_{jj}/n}, \quad j = 1, \dots, p \quad (44)$

Seleccionando $a_1 = (1, 0, \dots, 0)', a_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)' \text{ y } a_p = (0, \dots, 1)'$ se obtiene:

$$\bar{x} \pm c \sqrt{s_{jj}/n}, \quad j = 1, \dots, p \quad (44)$$

que son los **intervalos de confianza** para $i = 1, \dots, p$ al nivel de confianza 100 $(1 - \alpha)$ %.

Se pueden utilizar las siguientes matrices diagonales de coeficientes A para determinar los intervalos de confianza de cada componente de la refracción. Si se analizan los datos de la refracción completa con sus tres componentes, se puede utilizar la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Con esta matriz se pueden construir los intervalos de confianza para cada uno de los $p=3$ componentes de la refracción inducida por la cirugía; por ejemplo, cuando solo se estudia el astigmatismo, se utiliza la siguiente matriz para la construcción de los intervalos de confianza de los dos componentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Inferencia a partir de muestras grandes

Cuando el tamaño de la muestra es grande, la estadística t se aproxima a la normalidad. De forma similar, con n grande, la distribución T^2 se aproxima a χ^2 , teniendo en cuenta el teorema central del límite multivariante.

Análisis de los datos de ejemplo

Los pasos del algoritmo presentado se ejemplifican utilizando el grupo de 10 ojos (ojos izquierdos) de pacientes con glaucoma operados mediante la técnica trabeculectomía.

El análisis de los datos demográficos muestra que el 60 % de los pacientes operados con trabeculectomía fue de sexo masculino ([tabla 5](#)) y la edad promedio fue de 47,5 años aunque el rango de edades estuvo entre 16 y 69 años.

El análisis unidimensional de los parámetros prequirúrgicos y posquirúrgicos se muestra en la ([tabla 6](#)).

Tabla 5. Distribución de pacientes por sexo

Sexo	Frecuencia	Porcentaje
Femenino	4	40,0
Masculino	6	60,0
Total	10	100,0

Tabla 6. Estadística descriptiva

Variable	Media	Mínimo	Máximo	Desviación típica
Edad	47,50	16,00	69,00	16,09
pre_Z_Eq,Esf	-2,22	-9,64	0,86	2,92
pre_X_CCJ0	0,12	-1,49	1,41	0,85
pre_Y_CCJ45	0,26	-0,34	0,70	0,34
pos_Z_Eq,Esf	-1,80	-9,57	1,16	3,02
pos_X_CCJ0	0,25	-0,71	1,70	0,78
pos_Y_CCJ45	0,15	-0,36	0,70	0,35
ERIC_Z_Eq,Esf	0,42	-0,44	1,27	0,50
ERIC_X_CCJ0	0,13	-0,97	1,49	0,61
ERIC_Y_CCJ45	-0,11	-0,66	0,50	0,40

El equivalente esférico medio antes de la cirugía fue de -2,22 D; después de la cirugía era de -1,8 D. Los CCJ de ejes 0 y 90° variaron de -1,123 D a -0,253 D. Los CCJ de ejes 45 y 135° pasaron de -0,26 a -0,146 D.

El cambio refractivo inducido por la cirugía en las tres dimensiones fue menor a media dioptría: 0,42 D de equivalente esférico, -0,128D de CCJ0 y 0,113D de CCJ45.

En las comparaciones de medias realizadas solo resultó significativo el cambio producido en el equivalente esférico ($p= 0,024$) a un nivel de confianza del 95 % (tabla 7).

Teniendo en cuenta el escaso número de observaciones, se consideró realizar la prueba de rangos con signos de Wilcoxon, y se obtuvieron resultados similares (tabla 8), pues solo resultó significativo el cambio observado en el equivalente esférico ($p = 0,028$).

Los centroides del plano astigmático pre y posquirúrgicos están formados por los puntos (X, Y) que se obtienen a partir de la media de los componentes CCJ0 y CCJ45. En la figura 3 se visualiza la dispersión de las observaciones alrededor del centroide.

Tabla 7. Prueba de comparación de muestras relacionadas

-	-	Media	Desviación típica	Error típico de la media	LI, IC 95 %	LS, IC 95 %	t	gl	Significación (bilateral)
Par 1	pos_Z_Eq,Esf - pre_Z_Eq,Esf	0,42	0,50	0,16	0,07	0,78	2,71	9,00	0,02
Par 2	pos_X_CCJ0 - pre_X_CCJ0	0,13	0,61	0,19	- 0,31	0,56	0,67	9,00	0,52
Par 3	pos_Y_CCJ45 - pre_Y_CCJ45	-0,11	0,40	0,13	- 0,40	0,17	-0,89	9,00	0,40

Tabla 8. Prueba de los rangos con signos de Wilcoxon

-	pos_Z_Eq,Esf - pre_Z_Eq,Esf	pos_X_CCJ0 - pre_X_CCJ0	pos_Y_CCJ45 - pre_Y_CCJ45
Z	-2,19	-0,968	-0,770
Asymp. Sig. (2-tailed)	0,028	0,333	0,441

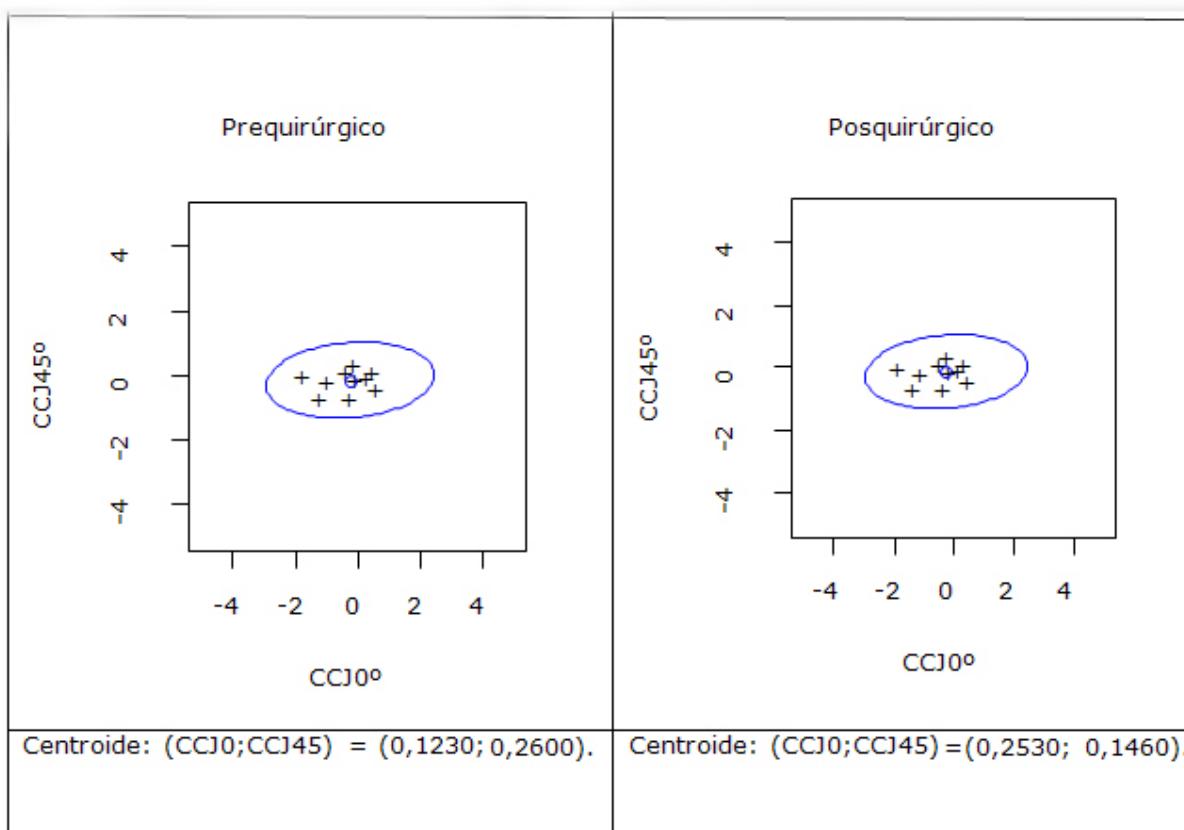


Fig. 3. Plano astigmático pre y posquirúrgico.

Los centroides están próximos al origen de coordenadas del plano astigmático, lo que demuestra la existencia de un componente astigmático clínicamente casi nulo.

La técnica utilizada para la cirugía de los pacientes con glaucoma (trabeculectomía) indujo como promedio una esfera de 0,25 D, y un astigmatismo que se traduce en un cilindro de 0,34 dioptrías en un eje de 159,43 grados (con la regla). Estos valores pueden considerarse clínicamente no significativos, lo cual es soportado por el análisis estadístico.

DISCUSIÓN

Las notaciones no polares de la refracción resuelven las dificultades de las notaciones polares para el análisis estadístico. La conversión de polar a no polar se puede realizar con la ayuda de un equivalente esférico y dos cilindros cruzados de *Jackson* de ejes $0^\circ/90^\circ$ y $45^\circ/135^\circ$ que revelan el componente directo/inverso y el oblicuo, respectivamente (*Thibos*, 2001). Así se garantiza que el componente esférico y el plano del astigmatismo formado por los cilindros cruzados sean ortogonales e independientes. Mediante este procedimiento se obtienen las coordenadas de un vector en un espacio dióptrico tridimensional, en el que están definidas las operaciones matemáticas de los números reales que permiten el tratamiento estadístico de los datos.

Esas tres coordenadas utilizadas en forma de matriz 3×1 permiten el cálculo de indicadores individuales y poblacionales. Ejemplo de ello es la estimación de la variación del astigmatismo también llamado astigmatismo inducido a partir de mediciones realizadas en un solo ojo antes y después de una cirugía. Con estas técnicas también podemos resumir los datos de poblaciones o grupos de ojos para determinar por ejemplo el astigmatismo medio.

Las fórmulas para la conversión a componentes de un plano dióptrico bidimensional (plano astigmático) pueden simplificarse más si no se desea tener en cuenta el componente esférico en el análisis, y puede prescindirse del factor 0,5 (la división por dos) en las fórmulas 10 y 17. A modo de ejemplo se muestran los resultados del procesamiento de un grupo pequeño de ojos de pacientes operados de trabeculectomía.

Se concluye que la representación cartesiana de la refracción es una notación no polar que facilita la representación gráfica y permite el análisis estadístico adecuado de los datos de individuos y de la población.

Anexo

Metodología para el análisis estadístico de datos refractivos

Para utilizar los datos de la refracción de uno o varios ojos con fines estadísticos y clínicos se deben tener en cuenta los elementos expuestos hasta el momento y otros que se van del marco de los objetivos de esta investigación. Con el objetivo de facilitar la comprensión y uso de la base teórica anterior se propone el algoritmo siguiente que resume los principales pasos y cálculos necesarios:

1. Llevar la información del cilindro de la refracción a notación en cilindro positivo. Por ejemplo, refracción para cristales en notación cilindro positivo/negativo.
2. (opcional) Transformar los datos del plano especular al vértice de la córnea. Se realiza si se combinan en el análisis datos del autorrefractoqueratómetro con refracción manifiesta. Para realizar la corrección de la distancia cristal ojo.¹¹
3. Convertir la refracción en plano especular en cilindro positivo a doble cilindro:

$$\begin{aligned} Esf(+cil) \times eje &\Leftrightarrow (esf + cil) \times eje \text{ y } (esf) \times eje \pm 90^\circ \\ &\Leftrightarrow (cil_1) \times eje \text{ y } (cil_2) \times eje \pm 90^\circ \end{aligned} \quad (47)$$

4. Aplicar fórmula de corrección de la distancia cristal ojo (por ejemplo: 12 mm) en cada cilindro de la notación en doble cilindro:

$$Cilindro_{córnea} = \frac{1000 \times Cilindro_{cristales}}{1000 - (Cilindro_{cristales} \times distancia_mm)} \quad (48)$$

La distancia (en mm) se estima en 12 mm para cristales de prueba y entre 13,5 y 14 mm en los refractores.

5. Convertir doble cilindro corregido en vértice de la córnea a refracción en cilindro positivo corregido (en vértice).

$$(cil_1) \times eje \text{ y } (cil_2) \times eje \pm 90^\circ \Leftrightarrow cil_2 (cil_1 - cil_2) \times eje \Leftrightarrow Esf (+cil) \times eje \quad (49)$$

6. Cálculo de los 2 componentes del plano astigmático o los 3 del espacio esferocilíndrico. Coordenadas cartesianas: Eq. Esf, J_0 , J_{45} (o C_0 , C_{45}).

$$EqEsf = z = Esf + \frac{Cil}{2} \quad (1)$$

$$X = J_0 = (-C/2) \cos(2\alpha) \quad (4)$$

$$Y = J_{45} = (-C/2) \sin(2\alpha) \quad (5)$$

7. Cálculo de los indicadores:

a. Variación o diferencia. Ejemplo: cálculo de astigmatismo inducido por la cirugía.

$$\Delta Refrac = Refrac_{final} - Refrac_{inicial} \quad (6)$$

$$[\Delta J_0, \Delta J_{45}, \Delta EqEsf] = [J_0, J_{45}, EqEsf]_{final} - [J_0, J_{45}, EqEsf]_{inicial} \quad (7)$$

$$[\Delta J_0, \Delta J_{45}, \Delta EqEsf] = [J_0_{final} - J_{0inicial}, J_{45_{final}} - J_{45_{inicial}}, EqEsf_{final} - EqEsf_{inicial}] \quad (8)$$

b. Medidas de tendencia central: vectores de medias o centroides.

$$\overline{M} = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n M_i = [\overline{J_0}, \overline{J_{45}}, \overline{EqEsf}] = \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n ([J_0, J_{45}, EqEsf]_i) \quad (15)$$

$$\overline{M} = \left[\frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n J_{0i}, \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n J_{45i}, \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n EqEsf_i \right] \quad (16)$$

$$M_i = [J_0, J_{45}, EqEsf]_i = \left[\frac{cil_i \times \cos(eje_i \times 2)}{2}, \frac{cil_i \times \sin(eje_i \times 2)}{2}, Esf_i + \frac{Cil_i}{2} \right] \quad (17)$$

c. Medidas de dispersión: intervalos de confianza, elipse, elipsoides para la media las unidimensionales (Eq. Esférico).

$$\bar{X} \pm t_{n-1}^2(\alpha/2) \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Los intervalos de confianza multivariantes se realizan con:

$$\alpha' \bar{x} \pm \sqrt{\frac{p(n-2)}{(n-p)} F_{p,n-p}(\alpha) \alpha' S_x \alpha}$$

8. Conversión de los resultados en notación cartesiana del espacio dióptrico tridimensional a la notación polar.

$$Refrac_{carrasquera} = [J_0, J_{45}, EqEsf] \leftrightarrow Esf(cil) \times eje \quad (11) \text{ y } (18)$$

$$|Cil| = 2 \times \sqrt{J_0^2 + J_{45}^2} \quad (12) \text{ y } (19)$$

$$Esf = EqEsf - \frac{Cil}{2} \quad (13) \text{ y } (20)$$

$$eje = \frac{1}{2} \times ArcTg \left(\frac{J_{45}}{J_0} \right) + C \quad (14) \text{ y } (21)$$

Con $C = 0^\circ$ si J_0 y $J_{45} < 0$; $C = 90^\circ$ si J_0 es positivo y $C = 180^\circ$ si $J_0 < 0^\circ$ y $J_{45} > 0^\circ$.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Thibos LN, Horner D. Power vector analysis of the optical outcome of refractive surgery. *J Cataract Refract Surg.* 2001;27(1):80-5.
2. Thibos LN, Applegate RA, Schwiegerling JT, Webb R. Standards for reporting the optical aberrations of eyes. *Journal of refractive surgery.* 2002;18(5):S652-60.
3. Alpins NA, Goggin M. Practical Astigmatism Analysis for Refractive Outcomes in Cataract and Refractive Surgery. *Survey of Ophthalmology.* 2004;49(1):109-22.
4. Kaye SB, Harris WF. Analyzing refractive data. *J Cataract Refract Surg.* 2002;28(12):2109-16.
5. Næser K. *Assessment and Statistics of Surgically Induced Astigmatism.* Aarhus, Denmark: University of Aarhus; 2008.
6. Holladay JT, Moran JR, Kezirian GM. Analysis of aggregate surgically induced refractive change, prediction error and intraocular astigmatism. *J Cataract Refract Surg.* 2001;27(1):61-79.
7. Long WF. A matrix formalism for desentration problems. *Am J Optom Physiol Opt.* 1976;53(1):27-33.
8. Harris WF. The Jackson Cross-Cylinder. Part 1: Properties. *The South African Optometrist.* 2007;66(2):41-55.
9. Touzeau O, Costantini E, Gaujoux T, Borderie V, Laroche L. Réfraction moyenne et variation de réfraction calculées dans un espace dioptrique. *Journal français d'ophthalmologie.* 2010;33(9):659-69.
10. Touzeau O, Gaujoux T, Costantini E, Borderie V, Larouche L. Les différentes expressions «polaires» et «non polaires» de la réfraction. *Journal français d'ophthalmologie.* 2010;33(1):56-71.
11. Holladay JT, Dheja DR, Koch DD. Evaluating and reporting astigmatism for individual and aggregate data. *J Cataract Refract Surg.* 1998;24(1):57-65.

12. Raasch TW. Spherocylindrical refractive errors and visual acuity. Optom Vis Sci. 1995; 72(4):272-5.
13. Jesson M, Arulmozhivarman P, Ganesan AR. Analysis of refractive errors in the human eye using Shack Hartmann Aberrometry. Acta Ophthalmologica. 2006; 84:81-204.
14. Carvalho LA, Chamon W, Schor P, de Castro JC. Quantitative comparison of different-shaped wavefront sensors and preliminary results for defocus aberrations on a mechanical eye. Arq Bras Oftalmol. 2006 [citado 4 de abril de 2014]; 69(2). Disponible en: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0004-27492006000200019&script=sci_arttext
15. Rencher AC. Methods of multivariate analysis. Wiley-Interscience publication; 2002.
16. Stevens J. Applied multivariate statistics for the social sciences. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers; 2002.
17. Hairs JF, Anderson RE, Tatham RL, Black WC. Multivariate data analysis. Englewood Cliffs, NJ: Printice Hall; 1998.
18. Booth DE. Multivariate Statistical Inference and Applications. Technometrics. 1998; 40(4):353-4.

Recibido: 24 de noviembre de 2013.

Aprobado: 15 de enero de 2014.

Dra. *Suzel Lapido Polanco*. Instituto Cubano de Oftalmología "Ramón Pando Ferrer". Ave. 76 No. 3104 entre 31 y 41 Marianao, La Habana, Cuba.
Correo electrónico: suzellp@infomed.sld.cu