ARTICULO DE REVISION

Ecuaciones diferenciales aplicadas al área de Ciencias de la Salud

Differential equations Applied to the Area of Health Science

Ivonne Rabatte Suárez,[1] Ma. Sobeida Leticia Blázquez Morales,[1] Diego Contreras Costeño[2]
[1]Instituto de Ciencias de la Salud, [2]Fac. de Matemáticas
Universidad Veracruzana

Rabatte-Suárez I., Blázquez-Morales SL., Contreras-Costeño D. Ecuaciones diferenciales aplicadas al área de Ciencias de la Salud. Rev Med UV 2006; 6(2): 33-36.

RESUMEN

Sabemos que desde el inicio de la biología como ciencia, ésta no dependió en lo absoluto de las matemáticas para su desarrollo con éxito, así que surge la pregunta ¿por qué tendríamos que utilizarlas ahora para entender fenómenos biológicos? El que las ciencias de la salud, como la biología por ejemplo, no emplearan a las matemáticas en la antigüedad, no quiere decir que en la actualidad (o a futuro) no podamos utilizarlas. Partiendo de esta idea, disciplinas como la genética y la ecología lograron éxitos importantes desarrollando modelos matemáticos basados en ecuaciones diferenciales. Actualmente, las matemáticas aportan herramientas y modelos matemáticos de ecuaciones diferenciales como apoyo a estudios específicos de investigación en el área de Ciencias de la Salud. En esta revisión se tomarán en cuenta nociones básicas sobre cálculo diferencial e integral de una variable, teoría básica sobre ecuaciones diferenciales ordinarias de primer grado y métodos de solución por: separación de variables, ecuaciones homogéneas, ecuaciones exactas y factores integrantes. Esto con la finalidad de incluir modelos matemáticos en este artículo.

Palabras Clave. Ecuación diferencial ordinaria de primer grado, ley de crecimiento exponencial, separación de variables.

ABSTRACT

We know that since the beginning of Biology as a science, it did not depend, at all, on the mathematics for its successful development, so the question arises: why would we have to use them nowadays for the understanding of the biological phenomenon? The fact that health sciences, such as Biology, did not use the mathematics in ancient times does not mean that at present times (or in the future) we could not use them. Leaving from this idea, disciplines as genetics and the ecology have achieved important successes by developing mathematical models based on differential equations. Currently, the mathematics contribute with tools and mathematical models of differential equations as a support to specific studies of research in the Health Science area. In this revision, basic notions will be taken into account regarding differential and integral calculus of a variable, basic theory about ordinary differential first degree equations and solving methods for: variable separation, homogeneous equations, exact equations

Recibido 14/08/2006 - Aceptado 12/02/2007

and integral factors. All of these with the purpose of including mathematical models in this article.

KEY WORDS: First degree ordinary differential equation, law of exponential growth, separation of variables.

INTRODUCCIÓN

La historia del desarrollo de las matemáticas cubre un periodo de casi siete mil años. Entre las primeras disciplinas encontramos el álgebra, la geometría y la trigonometría. Los griegos veían las matemáticas como una ciencia educativa, pues contemplaban definiciones, axiomas claramente formulados, y a partir del razonamiento lógico y prueba precisa, elaboraron una teoría de la geometría que demostró para todos los tiempos, el poder del pensamiento abstracto y condujo al hombre a descubrir que a través de las matemáticas se puede entender la naturaleza. Después de casi dos mil años, en el siglo XVII, aparece lo que hoy conocemos como matemática y ciencia moderna. Fue ésta la época de las grandes academias, donde los matemáticos eran físicos, los físicos eran filósofos y los filósofos eran matemáticos. La geometría analítica comienza con Fermat (1629) y Descartes (1637), siendo este último el primero en aplicar sistemáticamente el álgebra al estudio de la geometría. Cincuenta años más tarde, Newton y Leibniz desarrollan el cálculo diferencial e integral, que consiste en calcular la pendiente de la recta tangente a una curva y determinar el área limitada por una curva, respectivamente. A ellos se les conoce como los fundadores del cálculo, por la manera en cómo relacionaron ambos problemas; tales relaciones se encuentran enunciadas en el resultado más importante del cálculo, denominado: *Teorema Fundamental del Cálculo*. Éste fue el comienzo del análisis y dio ímpetu a las matemáticas y a la ciencia moderna vigente en la actualidad. De esta manera, el mayor número de aplicaciones de las matemáticas a la ciencia se concentran en el cálculo, en particular dentro del estudio de las ecuaciones diferenciales.

ANTECEDENTES

En la última década del siglo XVII, los hermanos James y Johan Bernoulli introdujeron términos como el de "integrar" una ecuación diferencial, así como el proceso de separación (*separatio indeterminatarum*) de una ecuación diferencial. Johan Bernoulli I (1692) encontró otro método, utilizando en una serie de problemas, la multiplicación por un "factor integrante", sobre todo para resolver ecuaciones en los cuales el método anterior no se podía aplicar, método también usado por su sobrino Daniel Bernoulli (1720). Sin embargo, los métodos eran incompletos y la teoría general de las ecuaciones diferenciales a comienzos del siglo XVIII no podía ser propuesta.

Es a Euler (1770) a quien le correspondió la primera sistematización de los trabajos anteriores en su obra: *Institutiones Calculi Integralis, Ediderunt Friendrich Engel et Ludwing Schlesinger*, la cual contiene una buena parte (y mucho más) del material que encontraríamos en un libro de texto actual, como el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden y su correspondiente clasificación en: lineales, separables, homogéneas y exactas; las de segundo orden y su generalización a las de orden superior; asimismo, encontramos el método de series de potencias.

Este trabajo marca el fin de la etapa *algebraica-algorítmica* en la historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias, y comienza la segunda etapa hasta finales del siglo XIX la cual es llamada "fundamentos", en atención a que en ésta, las principales cuestiones de fundamentación recibirán tratamiento y solución.

Los logros más importantes de esta etapa fueron los de D´Alambert (1776), quien encontró que la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la suma de una cierta solución particular y la solución general de la correspondiente solución homogénea, y Lagrange (1774), quien demostró que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes, es de la forma:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

Donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son un conjunto de soluciones linealmente independiente y $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes arbitrarias. Esto es conocido como el "Principio de superposición". Este mismo autor, en 1774, descubrió en su forma general el método de "Variación de parámetros".

MODELOS MATEMÁTICOS EN CIENCIAS DE LA SALUD

A ciencia cierta, no se sabe quién descubrió las ecuaciones diferenciales, ya que la historia de las matemáticas es tan grande como el origen del universo, del cual tampoco sabemos quién es su creador. Una ecuación diferencial es una expresión que involucra derivadas de una función desconocida de una o varias variables.

De las ecuaciones diferenciales, encontramos dos tipos:

(a) Si la función desconocida depende sólo de una variable, la ecuación se llama *Ecuación diferencial ordinaria*.

(b) Si la función desconocida depende de más de una variable, la ecuación se llama *Ecuación diferencial parcial*.

También las ecuaciones diferenciales pueden clasificarse por su orden y por su grado. El o*rden* de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en la ecuación, y el g*rado* de una ecuación diferencial es la potencia a la que esté elevada la derivada que da el orden de la ecuación diferencial. Una de las ecuaciones diferenciales más conocida y sencilla es la *Ley de crecimiento exponencial:*

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y \quad \text{cuyasolución es} \quad y = ke^{\alpha t} \qquad (1)$$

La ley del crecimiento exponencial, con las debidas modificaciones, puede tener un número muy grande de aplicaciones al área de Ciencias de la Salud. Entre los modelos fundamentales se encuentran:

I. MODELO DE CRECIMIENTO BIOLÓGICO. Un problema fundamental en biología es el *crecimiento*, sea éste el crecimiento de una célula, un órgano, un ser humano, una planta o una población. La ecuación diferencial (1) nos dice que el crecimiento ocurre si $\alpha > 0$, y por otro lado el decaimiento (o encogimiento) ocurre si $\alpha < 0$. Un defecto obvio de la ecuación (1) y de su solución es que si $\alpha > 0$ y el tiempo transcurre, el crecimiento es ilimitado. Esto es una contradicción con la realidad, puesto que, después de transcurrir un cierto tiempo, sabemos que la célula o individuo deja de crecer, y obtiene un tamaño máximo. La pregunta que surge es ¿podemos modificar (1) para que los resultados concuerden con la realidad?, la respuesta es sí, y está dada por la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y - \beta y^2 \quad , \quad y(t_0) = y_0 \qquad (2)$$

cuya solución es:

$$y = \frac{\alpha / \beta}{1 + \left(\frac{\alpha / \beta}{y_0} \right) e^{-\alpha (t - t_0)}} \qquad (3)$$

la cual se obtiene fácilmente aplicando el método de separación de variables. Además de (3), observemos que $\lim_{t \to \infty} y = \frac{\alpha}{\beta}$, lo cual muestra que el crecimiento dado por (3) tiene un límite, tal como lo requieren la realidad, y validando el modelo de crecimiento (2) y (3). Algunos ejemplos de aplicaciones para este modelo son: calcular la altura media de un grupo de mujeres en pleno crecimiento o predecir la población de México para el 2010, etcétera.

II. MODELO DE PROBLEMA EPIDEMIOLÓGICO. Un problema importante de biología y medicina trata de la ocurrencia, propagación y control de una enfermedad contagiosa; esto es, una enfermedad que puede transmitirse de un individuo a otros. La ciencia que estudia este problema se llama *epidemiología*, y si un porcentaje grande no común de una población adquiere la enfermedad, decimos que hay una *epidemia*. Un modelo matemático sencillo para la propagación de una enfermedad es:

$$\frac{dP_i}{dt} = kP_i(P - P_i) \quad , \quad P_i(t_0) = P_0 \qquad (4)$$

Donde P_i es el número de individuos infectados en el tiempo t, P_0 el número de individuos infectados en el tiempo t_0 y P es el número total de la población. La solución a la ecuación (4) se obtiene por separación de variables, dando como solución:

$$P_i = \frac{P}{1+\left(\frac{P}{P_0}-1\right)e^{-kP(t-t_0)}} \qquad (5)$$

Así, el modelo formado por (4) y (5) describe la propagación de una enfermedad en una población grande pero finita. El problema de epidemias donde se toma en cuenta la cuarentena es más complicado, ya que se considera un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, lo cual implica aplicar teoría de *álgebra lineal*.

III. MODELO DE ABSORCIÓN DE DROGAS EN ÓRGANOS O CÉLULAS. Un problema importante en el campo de la medicina consiste en determinar la absorción de químicos (tales como drogas) por células u órganos. Supongamos que un líquido transporta una droga dentro de un órgano de volumen V cm^3 a una tasa de a cm^3/seg y sale a una tasa de b cm^3/seg. La concentración de la droga en el líquido que entra es c cm^3/seg. La ecuación diferencial que modela tal problema es:

$$V\frac{dx}{dt} = ac - bx \qquad (6)$$

cuya solución es:

$$x = \frac{ac}{b} + \left(x_0 - \frac{ac}{b}\right)e^{-(t-t_0)/V} \qquad (7)$$

donde se presentan los siguientes casos:

Caso 1: $a = b$. En este caso, la tasa a la cual entra la droga es igual a la tasa a la cual sale, y (7) se convierte en:

$$x = c + (x_0 - c)e^{-b(t-t_0)/V}$$

Caso 2: $a = b$ y $x_0 = 0$. En este caso, las tasas de entrada y de salida son iguales, y la concentración inicial de la droga en el órgano es 0; entonces (7) resulta:

$$x = c\left(1 - e^{-b(t-t_0)/V}\right)$$

CONCLUSIONES

La revisión de los modelos matemáticos existentes nos da la pauta para llevar a cabo la elaboración de nuevos modelos de ecuaciones diferenciales ordinarias que apoyen la resolución de problemas específicos en el área de Ciencias de la Salud. Se beneficia de esta manera a la comunidad en general, al favorecer diagnósticos tempranos y tratamientos oportunos. La combinación de las herramientas matemáticas y los conocimientos de las ciencias biológicas logrará una fusión de ciencias en beneficio de la humanidad.

BIBLIOGRAFÍA

1. Hetcote HW. *Mathematical problems in biology, Aymptotic Behavior and Stability in epidemic models, Victoria conference.* Berlin, New York: Springer-Verlag, 1974; 83-92.
2. Miller Levy E. *Mathematical problems in biology, a model of morphogenesis, Victoria conference.* Berlin, New York: Springer-Verlag, 1974; 141-142.
3. Kochen S. *Mathematical problems in biology, Flagellar growth, Victoria conference*. Berlin, New York: Springer-Verlag, 1974; 143-145.
4. Hernández G, Velasco-Hernández JX. *El Manantial Escondido*. México: Fondo de Cultura Económica, 1999; 11-18, 25-26.
5. Hasser, La-Salle, Sullivan. *Análisis matemático,* 2ª. ed, México: Trillas, 1990; 1: 11-12.
6. Spiegel MR. *Ecuaciones diferenciales aplicadas,* 3ª. ed. México: Prentice-Hall Hispanoamericana, 1983; 148-159.
7. Braun M. *Differential equations and their applications: and introduction to applied mathematics.* Berlin, New York: Springer-Verlag, 1993; 443-457, 465-475.
8. Nápoles-Valdés JE, Negrón-Segura C. *La historia de las ecuaciones diferenciales ordinarias contadas por su libro de texto*, Octubre 2002; 3(2) (Available on line URL). http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1002.pdf
9. Gabriel-Argüelles JR, Avendaño-Garrido ML, Barahona-Gómez R. *Notas para un Curso de Ecuaciones Diferenciales.* Xalapa, Ver.: Facultad de Matemáticas, U.V., 2003; 5, 10-25.